

POTĘGI

Definicja potęgi

podstawa potęgi $\rightarrow a^n$ \leftarrow wykładnik potęgi

$a^0 = 1$ (każda liczba różna od zera, podniesiona do potęgi 0 daje zawsze 1)

$a^1 = a$ (każda liczba podniesiona do potęgi 1 dają tą samą liczbę)

1. Jeśli wykładnik jest liczbą naturalną (całkowitą dodatnią), to potęgowanie wykonujemy wg zasady:

$a^n = a \cdot a \cdot a \dots \cdot a$ (podstawę mnożymy przez samą siebie tyle razy ile wskazuje wykładnik)

Przykład 1

$$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$$

2. Jeśli wykładnik jest liczbą całkowitą ujemną (czyli -2, -3, -4, itd.), to potęgowanie wykonujemy wg zasady:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{lub} \quad a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

Przykład 2

$$4^{-3} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$$

3. Jeśli wykładnik jest liczbą wymierną dodatnią (czyli ułamkiem dodatnim) to potęgowanie wykonujemy wg zasady:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{lub} \quad (\sqrt[n]{a})^m$$

Przykład 3

$$8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$$

4. Jeśli wykładnik jest liczbą wymierną ujemną (czyli ułamkiem ujemnym) to potęgowanie wykonujemy wg zasady:

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \quad \text{lub} \quad \frac{1}{(\sqrt[n]{a})^m} \quad (\text{zauważ, że ten wzór to połączenie wzoru 2 i 3})$$

Przykład 4

$$8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{8})^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

Działania na potęgach

1. Mnożenie potęg o tych samych podstawach:

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ (podstawę przepisujemy a wykładniki dodajemy)

Przykład 5

$$2^3 \cdot 2^6 = 2^{3+6} = 2^9$$

2. Dzielenie potęg o tych samych podstawach:

$a^n : a^m = a^{n-m}$ (podstawę przepisujemy a wykładniki odejmujemy)

Przykład 6

$$2^3 : 2^6 = 2^{3-6} = 2^{-3}$$

3. Mnożenie potęg o tych samych wykładnikach:

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ (podstawy mnożymy przez siebie a wykładnik przepisujemy)

Przykład 7

$$2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 3)^3 = 6^3$$

4. Dzielenie potęg o tych samych wykładnikach:

$a^n : b^n = (a : b)^n$ (podstawy dzielimy przez siebie a wykładnik przepisujemy)

Przykład 8

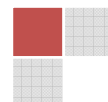
$$12^3 : 3^3 = (12 : 3)^3 = 4^3$$

5. Potęgowanie potęgi

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ (podstawę przepisujemy a wykładniki mnożymy)

Przykład 9

$$(5^3)^4 = 5^{3 \cdot 4} = 5^{12}$$



Różne przykłady, w których stosuje się działania na potęgach

Przykład 10

Oblicz $\sqrt[3]{(-27)^{-1}} \cdot 81^{\frac{3}{4}}$

Najpierw pozbywamy się pierwiastka.

$$(-27)^{-1} \text{ to } -\frac{1}{27} \text{ (skorzystaliśmy ze wzoru } a^{-n} = (\frac{1}{a})^n \text{)}$$

$$\text{stąd } \sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = -\frac{1}{3} \text{ (bo } (-\frac{1}{3})^3 = -\frac{1}{27} \text{)}$$

Do obliczenia $81^{\frac{3}{4}}$ zastosujemy wzór $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$ i otrzymamy $\sqrt[4]{81}^3 = 3^3 = 27$

$$\text{Teraz już łatwo } -\frac{1}{3} \cdot 27 = -\frac{27}{3} = -9$$

Przykład 11

Oblicz $\frac{(2^4 \cdot 5^{-2})^{-2}}{(2^{-3} \cdot 5^{-4})^{-1}}$

Najpierw zastosujemy wzór na potęgowanie potęgi czyli $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ i otrzymamy $\frac{2^{-8} \cdot 5^4}{2^3 \cdot 5^4}$

Teraz zastosujemy wzór na dzielenie potęg o tych samych podstawach czyli $a^n : a^m = a^{n-m}$ oddzielnie dla potęg o podstawie 2 i oddzielnie dla potęg o podstawie 5.

Z podzielenia potęg o podstawie 2 otrzymamy $2^{-8} : 2^3 = 2^{-8-3} = 2^{-11}$

Z podzielenia potęg o podstawie 5 otrzymamy $5^4 : 5^4 = 5^{4-4} = 5^0 = 1$

$$\text{Zatem nasz przykład przybierze teraz postać } 2^{-11} \cdot 1 = \frac{1}{2^{11}}$$

Przykład 12

Oblicz: $4^5 + 4^6 + 4^7$

Niestety nie ma żadnego wzoru na dodawanie potęg o tych samych podstawach ☹ - musimy więc poradzić sobie sprytem. Spróbujemy zrobić tak, aby mieć w takim dodawaniu takie same potęgi, np. tylko potęgi 4^5

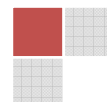
Skorzystajmy ze wzoru $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

Zauważ, że za jego pomocą mogę 4^6 zapisać jako $4^5 \cdot 4^1$ co daje po prostu $4 \cdot 4^5$,

4^7 zapisać jako $4^5 \cdot 4^2$ co daje po prostu $16 \cdot 4^5$,

Zatem $4^5 + 4^6 + 4^7 = 4^5 + 4 \cdot 4^5 + 16 \cdot 4^5$ (zauważ, że zapis ten jest podobny do $x+4x+16x$ co dało by $21x$ - podobnie postępujemy w przypadku dodawania takich samych potęg)

$$\text{Wynik zatem to } 21 \cdot 4^5 = 21 \cdot 256 = 5376$$



Notacja wykładnicza

Każdą liczbę dodatnią można zapisać za pomocą mnożenia $a \cdot 10^k$ (a jest liczbą z przedziału od 1 do 10, zaś k jest liczbą całkowitą) – zapis taki to właśnie **notacja wykładnicza**.

Przykład 13

$$456000 = 4,56 \cdot 10^5$$

$$0,0032 = 3,2 \cdot 10^{-3}$$

W notacji wykładniczej zapisujemy zazwyczaj liczby bardzo duże jak np. 7200000000000000 (wykładnik notacji dodatni – patrz przykład 14 poniżej) lub bardzo małe jak np. 0,000000000123 (wykładnik notacji ujemny - patrz przykład 15 poniżej).

Jako to działa?

Przykład 14

Zapisz w notacji wykładniczej 230000000000.

Pamiętamy, że przed potęgą musi stać liczba z przedziału od 1 do 10. W naszym przykładzie do tego przedziału pasuje liczba 2,3.

Postaw „w głowie” przecinek w liczbie 230000000000 pomiędzy 2 a 3 i policz ile jest cyfr po przecinku. (2,30000000000 – po przecinku jest 11 cyfr, więc naszym wykładnikiem będzie właśnie 11).

Liczbę 230000000000 w notacji wykładniczej zapiszemy jako $2,3 \cdot 10^{11}$

Przykład 15

Zapisz w notacji wykładniczej 0,00000431

Pamiętamy, że przed potęgą musi stać liczba z przedziału od 1 do 10. W naszym przykładzie do tego przedziału pasuje liczba 4,31.

Postaw „w głowie” przecinek w liczbie 0,00000431 pomiędzy 4 a 31 i policz o ile jest cyfr przecinek się przesunął.

(0,000004,31 – widzimy, że przecinek przesunął się o 6 cyfr więc w wykładniku zapisujemy -6).

Liczbę 0,00000431 w notacji wykładniczej zapiszemy jako $4,31 \cdot 10^{-6}$

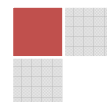
Przykład 16

Podobnie można działać w drugą stronę.

Np.

a) ile wynosi liczba $3,5 \cdot 10^4$ – przecinek przesuwamy w prawo o 4 miejsca i otrzymujemy 35000

b) ile wynosi liczba $7,12 \cdot 10^{-3}$ – przecinek przesuwamy w lewo o 3 miejsca i otrzymujemy 0,00712



PIERWIASTKI

Definicja pierwiastka

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ jeśli } b^n = a$$

dla pierwiastka 2-go stopnia mamy odpowiednio

$$\sqrt{a} = b \text{ jeśli } b^2 = a \text{ (pierwiastki 2-go stopnia można wyciągać tylko z liczb dodatnich)}$$

zaś dla pierwiastka 3-go stopnia mamy

$$\sqrt[3]{a} = b \text{ jeśli } b^3 = a \text{ (pierwiastki 3-go stopnia można wyciągać zarówno z liczb dodatnich jak i ujemnych)}$$

Przykład 17

$$\sqrt{36} = 6, \text{ bo } 6^2 = 36; \quad \sqrt[3]{27} = 3, \text{ bo } 3^3 = 27; \quad \sqrt[4]{16} = 2, \text{ bo } 2^4 = 16 \text{ itd.}$$

Zapamiętaj też, że $\sqrt[n]{0} = 0$ oraz $\sqrt[n]{1} = 1$

Działania na pierwiastkach

1. Mnożenie pierwiastków tego samego stopnia:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Przykład 18

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2 \cdot 32} = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{4} = \text{nie można pomnożyć (różne stopnie pierwiastków)}$$

2. Dzielenie pierwiastków tego samego stopnia:

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$$

Przykład 19

$$\sqrt{200} : \sqrt{2} = \sqrt{100} = 10$$

$$\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\frac{24}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

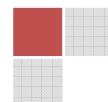
$$\sqrt{12} : \sqrt[3]{4} = \text{nie można podzielić (różne stopnie pierwiastków)}$$

3. Pierwiastkowanie pierwiastka

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Przykład 20

$$\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[2 \cdot 3]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$$



4. Pierwiastek z kwadratu

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Przykład 21

$$\sqrt{4^2} = |4| = 4 \quad \text{albo} \quad \sqrt{(-6)^2} = |-6| = 6$$

Różne przykłady, w których stosuje się działania na pierwiastkach

Przykład 22

Oblicz:
$$\frac{\sqrt{27} \cdot \sqrt[3]{32}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{4}}$$

Pamiętamy, że mnożyć i dzielić można tylko pierwiastki tego samego stopnia!

W naszym przykładzie nie mogę pomnożyć pierwiastków w liczniku i pierwiastków w mianowniku, ale mogę podzielić je w taki sposób:

$$(\sqrt{27} : \sqrt{3}) \cdot (\sqrt[3]{32} : \sqrt[3]{4}) \text{ co nam da: } \sqrt{9} \cdot \sqrt[3]{8}, \text{ a to już mogę prosto obliczyć: } 3 \cdot 2 = 6$$

Przykład 23**Liczba $\sqrt{80}$ wynosi...**

Mamy tu do czynienia z operacją wyłączania czynnika przed znak pierwiastka.

Polega ona na tym, że liczbę znajdującą się pod pierwiastkiem muszą zapisać w postaci mnożenia dwóch liczb, tak aby z jednej z nich dało się wyciągnąć pierwiastek.

Naszą liczbę 80 można zapisać jako $16 \cdot 5$

Otrzymamy więc:

$$\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} \text{ - taki pierwiastek (zgodnie z działaniem } \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \text{) mogę rozbić na } \sqrt{16} \cdot \sqrt{5}$$

Po wyciągnięciu $\sqrt{16}$ otrzymamy $4\sqrt{5}$.

I o to nam chodziło...

Przykład 24

Oblicz:
$$6\sqrt{27} - 3\sqrt{75}$$

W przykładzie tym postępujemy podobnie jak w przykładzie 23 – czyli wyłączmy czynniki przed znak pierwiastka.

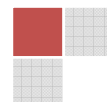
I tak:

$$\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 25 \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

Po takiej zamianie nasz przykład przyjmie postać:

$$6 \cdot 3\sqrt{3} - 3 \cdot 5\sqrt{3} = 18\sqrt{3} - 15\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$



LOGARYTMY

Definicja logarytmu

$$\log_a b = c, \text{ jeśli } a^c = b$$

a to podstawa logarytmu – musi być dodatnia i nie może równać się 1,

b to liczba logarytmowana – musi też być dodatnia

Przykład 25

$$\log_2 16 = 4, \text{ bo } 2^4 = 16; \quad \log_5 125 = 3, \text{ bo } 5^3 = 125$$

Zapamiętaj!

$\log_a a = 1$ (logarytm, w którym podstawa i liczba logarytmowana są takie same wynosi 1)

$\log_a 1 = 0$ (logarytm o dowolnej podstawie z 1 zawsze daje 0)

Działania na logarytmach

1. Dodawanie logarytmów o tych samych podstawach:

$$\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$$

Przykład 26

$$\log_3 9 + \log_3 3 = \log_3 (9 \cdot 3) = \log_3 27 = 3$$

2. Odejmowanie logarytmów o tych samych podstawach:

$$\log_a b - \log_a c = \log_a (b:c)$$

Przykład 27

$$\log_4 32 - \log_4 2 = \log_4 (32:2) = \log_4 16 = 2$$

3. Mnożenie logarytmu przez liczbę

$$p \cdot \log_a b = \log_a b^p$$

Przykład 28

$$3 \log_8 4 = \log_8 4^3 = \log_8 64 = 2$$



Różne przykłady, w których stosuje się działania na logarytmach

Przykład 29**Oblicz $2 \log 5 + \log 4$**

Pamiętajmy, że w przypadku, kiedy nie ma zapisanej podstawy logarytmu, to w domyśle wynosi ona 10.

Działając na tych logarytmach musimy zastosować 2 operacje:

najpierw $p \cdot \log_a b = \log_a b^p$ a potem dodawanie logarytmów $\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$ otrzymamy więc: $\log 5^2 + \log 4 = \log 25 + \log 4 = \log (25 \cdot 4) = \log 100 = 2$ (bo $10^2 = 100$)**Przykład 30****Oblicz $\log_{16} 64$.**

Są czasem takie przykłady logarytmów (jak chociażby ten), w których nie można bezpośrednio zastosować definicji logarytmu, no bo 16 do jakiej potęgi da 64? Ciężko tak z głowy w tym przypadku odpowiedzieć.

Posłużymy się tu więc takim oto sposobem:

Niech $\log_{16} 64 = x$ (no bo póki co nie wiemy ile to jest)Zgodnie z definicją logarytmu otrzymamy, że $16^x = 64$ Zauważ, że zarówno 16 jak i 64 to potęgi 2-ki. Możemy więc nasze równanie zapisać tak: $(2^4)^x = 2^6$ A to daje $2^{4x} = 2^6$

Skoro dwie potęgi mające takie same podstawy są równe, to znaczy, że muszą mieć również takie same wykładniki.

Piszemy więc równość pomiędzy wykładnikami tych potęg i otrzymujemy $4x = 6$

Rozwiązujemy to równanie

$$4x = 6 \quad | :4$$

$$x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

czyli $\log_{16} 64 = \frac{3}{2}$ **Przykład 31****Oblicz $\log_3 \frac{1}{81}$**

Tu, podobnie jak w przykładzie powyższym trudno odgadnąć do której potęgi podnieść 3, aby otrzymać 81. Postąpimy więc analogicznie jak w przykładzie 30.

Niech $\log_3 \frac{1}{81} = x$, stąd $3^x = \frac{1}{81}$ 81 to 3^4 zatem $3^x = \frac{1}{3^4}$ przy okazji potęg poznaliśmy wzór $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, wynika z niego, że $\frac{1}{3^4}$ to 3^{-4} stąd $3^x = 3^{-4}$

porównujemy potęgi i otrzymujemy:

$$x = -4$$

czyli $\log_3 \frac{1}{81} = -4$ 