POTĘGI

Definicja potęgi

podstawa potęgi –> $\mathbf{a}^{\mathbf{n}} <\!-\textit{wykładnik potęgi}$

$\mathbf{a^0 = 1}$ (każda liczba różna od zera, podniesiona do potęgi 0 daje zawsze 1)

$\mathbf{a^1 = a}$ (każda liczba podniesiona do potęgi 1 dają tą samą liczbę)

1. Jeśli wykładnik jest liczbą naturalną (całkowitą dodatnią), to potęgowanie wykonujemy wg zasady:

$\mathbf{a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}$ (podstawę mnożymy przez samą siebie tyle razy ile wskazuje wykładnik)

Przykład 1
$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

2. Jeśli wykładnik jest liczbą całkowitą ujemną (czyli -2, -3, -4, itd.), to potęgowanie wykonujemy wg zasady:

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ **lub** $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$

Przykład 2
$4^{-3} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$

3. Jeśli wykładnik jest liczbą wymierną dodatnią (czyli ułamkiem dodatnim) to potęgowanie wykonujemy wg zasady:

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ **lub** $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

Przykład 3
$8^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$

4. Jeśli wykładnik jest liczbą wymierną ujemną (czyli ułamkiem ujemnym) to potęgowanie wykonujemy wg zasady:

$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ **lub** $\frac{1}{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m}$ (zauważ, że ten wzór to połączenie wzoru 2 i 3)

Przykład 4
$8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{8}\right)^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

Działania na potęgach

1. Mnożenie potęg o tych samych podstawach:

$\mathbf{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$ (podstawę przepisujemy a wykładniki dodajemy)

Przykład 5
$2^3 \cdot 2^6 = 2^{3+6} = 2^9$

2. Dzielenie potęg o tych samych podstawach:

$\mathbf{a^n : a^m = a^{n-m}}$ (podstawę przepisujemy a wykładniki odejmujemy)

Przykład 6
$2^3 : 2^6 = 2^{3-6} = 2^{-3}$

3. Mnożenie potęg o tych samych wykładnikach:

$\mathbf{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$ (podstawy mnożymy przez siebie a wykładnik przepisujemy)

Przykład 7
$2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 3)^3 = 6^3$

4. Dzielenie potęg o tych samych wykładnikach:

$\mathbf{a^n : b^n = (a : b)^n}$ (podstawy dzielimy przez siebie a wykładnik przepisujemy)

Przykład 8
$12^3 : 3^3 = (12 : 3)^3 = 4^3$

5. Potęgowanie potęgi

$\mathbf{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$ (podstawę przepisujemy a wykładniki mnożymy)

Przykład 9
$(5^3)^4 = 5^{3 \cdot 4} = 5^{12}$

Różne przykłady, w których stosuje się działania na potęgach

Przykład 10

Oblicz $\sqrt[3]{(-27)^{-1}} \cdot 81^{\frac{3}{4}}$

Najpierw pozbywamy się pierwiastka.
$(-27)^{-1}$ to $-\frac{1}{27}$ (skorzystaliśmy ze wzoru $a^{-n} = (\frac{1}{a})^n$)
stąd $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = -\frac{1}{3}$ (bo $(-\frac{1}{3})^3 = -\frac{1}{27}$)
Do obliczenia $81^{\frac{3}{4}}$ zastosujemy wzór $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$ i otrzymamy $\sqrt[4]{81}^3 = 3^3 = 27$

Teraz już łatwo $-\frac{1}{3} \cdot 27 = -\frac{27}{3} = -9$

Przykład 11

Oblicz $\frac{(2^4 \cdot 5^{-2})^{-2}}{(2^{-3} \cdot 5^{-4})^{-1}}$

Najpierw zastosujmy wzór na potęgowanie potęgi czyli $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ i otrzymamy $\frac{2^{-8} \cdot 5^4}{2^3 \cdot 5^4}$
Teraz zastosujemy wzór na dzielenie potęg o tych samych podstawach czyli $a^n : a^m = a^{n-m}$ oddzielnie dla potęg o podstawie 2 i oddzielnie dla potęg o podstawie 5.

Z podzielenia potęg o podstawie 2 otrzymamy $2^{-8} : 2^3 = 2^{-8-3} = 2^{-11}$
Z podzielenia potęg o podstawie 5 otrzymamy $5^4 : 5^4 = 5^{4-4} = 5^0 = 1$

Zatem nasz przykład przybierze teraz postać $2^{-11} \cdot 1 = \frac{1}{2^{11}}$

Przykład 12

Oblicz: $4^5 + 4^6 + 4^7$

Niestety nie ma żadnego wzoru na dodawanie potęg o tych samych podstawach ☺ - musimy więc poradzić sobie sprytem. Spróbujemy zrobić tak, aby mieć w takim dodawaniu takie same potęgi, np. tylko potęgi 4^5

Skorzystajmy ze wzoru $\mathbf{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$.
Zauważ, że za jego pomocą mogę 4^6 zapisać jako $4^5 \cdot 4^1$ co daje po prostu $4 \cdot 4^5$,
4^7 zapisać jako $4^5 \cdot 4^2$ co daje po prostu $16 \cdot 4^5$,

Zatem $4^5 + 4^6 + 4^7 = 4^5 + 4 \cdot 4^5 + 16 \cdot 4^5$ (zauważ, że zapis ten jest podobny do x+4x+16x co dało by 21x – podobnie postępujemy w przypadku dodawania takich samych potęg)

Wynik zatem to $21 \cdot 4^5 = 21 \cdot 256 = 5376$

Notacja wykładnicza

Każdą liczbę dodatnią można zapisać za pomocą mnożenia $\mathbf{a \cdot 10^k}$ (**a** jest liczbą z przedziału od 1 do 10, zaś **k** jest liczbą całkowitą) – zapis taki to właśnie **notacja wykładnicza.**

Przykład 13
$456000 = 4{,}56 \cdot 10^5$
$0{,}0032 = 3{,}2 \cdot 10^{-3}$

W notacji wykładniczej zapisujemy zazwyczaj liczby bardzo duże jak np. 7200000000000000 (wykładnik notacji dodatni – patrz przykład 14 poniżej) lub bardzo małe jak np. 0,0000000000123 (wykładnik notacji ujemny - patrz przykład 15 poniżej).

Jako to działa?

Przykład 14
Zapisz w notacji wykładniczej 230000000000.

Pamiętamy, że przed potęgą musi stać liczba z przedziału od 1 do 10. W naszym przykładzie do tego przedziału pasuje liczba 2,3.
Postaw „w głowie" przecinek w liczbie 230000000000 pomiędzy 2 a 3 i policz ile jest cyfr po przecinku. (2,30000000000 – po przecinku jest 11 cyfr, więc naszym wykładnikiem będzie właśnie 11).

Liczbę 230000000000 w notacji wykładniczej zapiszemy jako $2{,}3 \cdot 10^{11}$

Przykład 15
Zapisz w notacji wykładniczej 0,00000431

Pamiętamy, że przed potęgą musi stać liczba z przedziału od 1 do 10. W naszym przykładzie do tego przedziału pasuje liczba 4,31.
Postaw „w głowie" przecinek w liczbie 0,00000431 pomiędzy 4 a 31 i policz o ile jest cyfr przecinek się przesunął.
(0,000004,31 – widzimy, że przecinek przesunął się o 6 cyfr więc w wykładniku zapisujemy -6).

Liczbę 0,00000431 w notacji wykładniczej zapiszemy jako $4{,}31 \cdot 10^{-6}$

Przykład 16
Podobnie można działać w drugą stronę.
Np.
a) ile wynosi liczba $3{,}5 \cdot 10^4$ – przecinek przesuwamy w prawo o 4 miejsca i otrzymujemy 35000
b) ile wynosi liczba $7{,}12 \cdot 10^{-3}$ – przecinek przesuwamy w lewo o 3 miejsca i otrzymujemy 0,00712

PIERWIASTKI

Definicja pierwiastka

$\sqrt[n]{a} = b$ **jeśli** $b^n = a$

dla pierwiastka 2-go stopnia mamy odpowiednio

$\sqrt{a} = b$ **jeśli** $b^2 = a$ (pierwiastki 2-go stopnia można wyciągać tylko z liczb dodatnich)

zaś dla pierwiastka 3-go stopnia mamy

$\sqrt[3]{a} = b$ **jeśli** $b^3 = a$ (pierwiastki 3-go stopnia można wyciągać zarówno z liczb dodatnich jak i ujemnych)

Przykład 17
$\sqrt{36} = 6$, bo $6^2 = 36$; $\sqrt[3]{27} = 3$, bo $3^3=27$; $\sqrt[4]{16} = 2$, bo $2^4 = 16$ itd.
Zapamiętaj też, że $\sqrt[n]{0}=0$ **oraz** $\sqrt[n]{1}=1$

Działania na pierwiastkach

1.Mnożenie pierwiastków tego samego stopnia:

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

Przykład 18
$\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{9} = 3$
$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2 \cdot 32} = \sqrt[3]{64} = 4$
$\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{4}$ = nie można pomnożyć (różne stopnie pierwiastków)

2. Dzielenie pierwiastków tego samego stopnia:

$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$

Przykład 19
$\sqrt{200} : \sqrt{2} = \sqrt{100} = 10$
$\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\frac{24}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$
$\sqrt{12} : \sqrt[3]{4}$ = nie można podzielić (różne stopnie pierwiastków)

3. Pierwiastkowanie pierwiastka

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

Przykład 20
$\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[2\cdot 3]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$

4. Pierwiastek z kwadratu

$\sqrt{a^2} = |a|$

Przykład 21
$\sqrt{4^2} = |4| = 4$ albo $\sqrt{(-6)^2} = |-6| = 6$

Różne przykłady, w których stosuje się działania na pierwiastkach

Przykład 22
Oblicz: $\frac{\sqrt{27} \cdot \sqrt[3]{32}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{4}}$

Pamiętamy, że mnożyć i dzielić można tylko pierwiastki tego samego stopnia!

W naszym przykładzie nie mogę pomnożyć pierwiastków w liczniku i pierwiastków w mianowniku, ale mogę podzielić je w taki sposób:
$(\sqrt{27}:\sqrt{3}) \cdot (\sqrt[3]{32} : \sqrt[3]{4})$ co nam da: $\sqrt{9} \cdot \sqrt[3]{8}$, a to już mogę prosto obliczyć: $3 \cdot 2 = 6$

Przykład 23
Liczba $\sqrt{80}$ wynosi…

Mamy tu do czynienia z operacją wyłączania czynnika przed znak pierwiastka.
Polega ona na tym, że liczbę znajdującą się pod pierwiastkiem muszę zapisać w postaci mnożenia dwóch liczb, tak aby z jednej z nich dało się wyciągnąć pierwiastek.

Naszą liczbę 80 można zapisać jako $16 \cdot 5$
Otrzymamy więc:
$\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5}$ - taki pierwiastek (zgodnie z działaniem $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$) mogę rozbić na $\sqrt{16} \cdot \sqrt{5}$
Po wyciągnięciu $\sqrt{16}$ otrzymamy $4\sqrt{5}$.
I o to nam chodziło…

Przykład 24
Oblicz: $6\sqrt{27} - 3\sqrt{75}$

W przykładzie tym postępujemy podobnie jak w przykładzie 23 – czyli wyłączmy czynniki przed znak pierwiastka.
I tak:
$\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$
$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 25 \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

Po takiej zamianie nasz przykład przyjmie postać:
$6 \cdot 3\sqrt{3} - 3 \cdot 5\sqrt{3} = 18\sqrt{3} - 15\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

LOGARYTMY

Definicja logarytmu

$\log_a b = c$, jeśli $a^c = b$

a to podstawa logarytmu – musi być dodatnia i nie może równać się 1,

b to liczba logarytmowana – musi też być dodatnia

Przykład 25
$\log_2 16 = 4$, bo $2^4 = 16$; $\log_5 125 = 3$, bo $5^3 = 125$
Zapamiętaj!
$\log_a a = 1$ (logarytm, w którym podstawa i liczba logarytmowana są takie same wynosi 1)
$\log_a 1 = 0$ (logarytm o dowolnej podstawie z 1 zawsze daje 0)

Działania na logarytmach

1.Dodawanie logarytmów o tych samych podstawach:

$\log_a b + \log_a c = \log_a (b\cdot c)$

Przykład 26
$\log_3 9 + \log_3 3 = \log_3 (9\cdot 3) = \log_3 27 = 3$

2.Odejmowanie logarytmów o tych samych podstawach:

$\log_a b - \log_a c = \log_a (b:c)$

Przykład 27
$\log_4 32 - \log_4 2 = \log_4 (32:2) = \log_4 16 = 2$

3. Mnożenie logarytmu przez liczbę

$p\cdot\log_a b = \log_a b^p$

Przykład 28
$3\log_8 4 = \log_8 4^3 = \log_8 64 = 2$

Różne przykłady, w których stosuje się działania na logarytmach

Przykład 29
Oblicz 2 log 5 + log 4

Pamiętajmy, że w przypadku, kiedy nie ma zapisanej podstawy logarytmu, to w domyśle wynosi ona 10.

Działając na tych logarytmach musimy zastosować 2 operacje:
najpierw $p \cdot \log_a b = \log_a b^p$
a potem dodawanie logarytmów $\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$

otrzymamy więc: $\log 5^2 + \log 4 = \log 25 + \log 4 = \log (25 \cdot 4) = \log 100 = 2$ (bo $10^2 = 100$)

Przykład 30
Oblicz $\log_{16} 64$.

Są czasem takie przykłady logarytmów (jak chociażby ten), w których nie można bezpośrednio zastosować definicji logarytmu, no bo 16 do jakiej potęgi da 64? Ciężko tak z głowy w tym przypadku odpowiedzieć.

Posłużymy się tu więc takim oto sposobem:
Niech $\log_{16} 64 = x$ (no bo póki co nie wiemy ile to jest)
Zgodnie z definicją logarytmu otrzymamy, że $16^x = 64$
Zauważ, że zarówno 16 jak i 64 to potęgi 2-ki. Możemy więc nasze równanie zapisać tak: $(2^4)^x = 2^6$
A to daje $2^{4x} = 2^6$
Skoro dwie potęgi mające takie same podstawy są równe, to znaczy, że muszą mieć również takie same wykładniki.
Piszemy więc równość pomiędzy wykładnikami tych potęg i otrzymujemy $4x = 6$
Rozwiązujemy to równanie
$4x = 6 \ |:4$
$x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

czyli $\log_{16} 64 = \frac{3}{2}$

Przykład 31
Oblicz $\log_3 \frac{1}{81}$

Tu, podobnie jak w przykładzie powyższym trudno odgadnąć do której potęgi podnieść 3, aby otrzymać 81.
Postąpimy więc analogicznie jak w przykładzie 30.
Niech $\log_3 \frac{1}{81} = x$, stąd $3^x = \frac{1}{81}$
81 to 3^4 zatem $3^x = \frac{1}{3^4}$
przy okazji potęg poznaliśmy wzór $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, wynika z niego, że $\frac{1}{3^4}$ to 3^{-4}
stąd $3^x = 3^{-4}$
porównujemy potęgi i otrzymujemy:
$x = -4$

czyli $\log_3 \frac{1}{81} = -4$