LICZBY - Podział liczb

- **Liczby naturalne** (N) – to liczby, za pomocą których rachujemy.

Przykład
0, 1, 2, 3, 4, 5, … , 99, 100, 101, … , 999, 1000, …

- **Liczby całkowite** (C) – to wszystkie liczby naturalne oraz liczby do nich przeciwne.

Przykład
… , -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, … , 99, 100, 101,…

- **Liczby wymierne** (W) – to wszystkie liczby, które <u>możemy</u> zapisać za pomocą ułamka zwykłego $\frac{p}{q}$, gdzie p i q są liczbami całkowitymi i $q \neq 0$.
  Uwaga! Liczby wymierne można także zapisać ułamkiem dziesiętnym: skończonym lub nieskończonym okresowym.

Przykład
$\frac{3}{4}$, $-2\frac{1}{3}$, $\frac{11}{7}$ itd., ale również 0,12 ; 3,77… ; 0,(21) itd

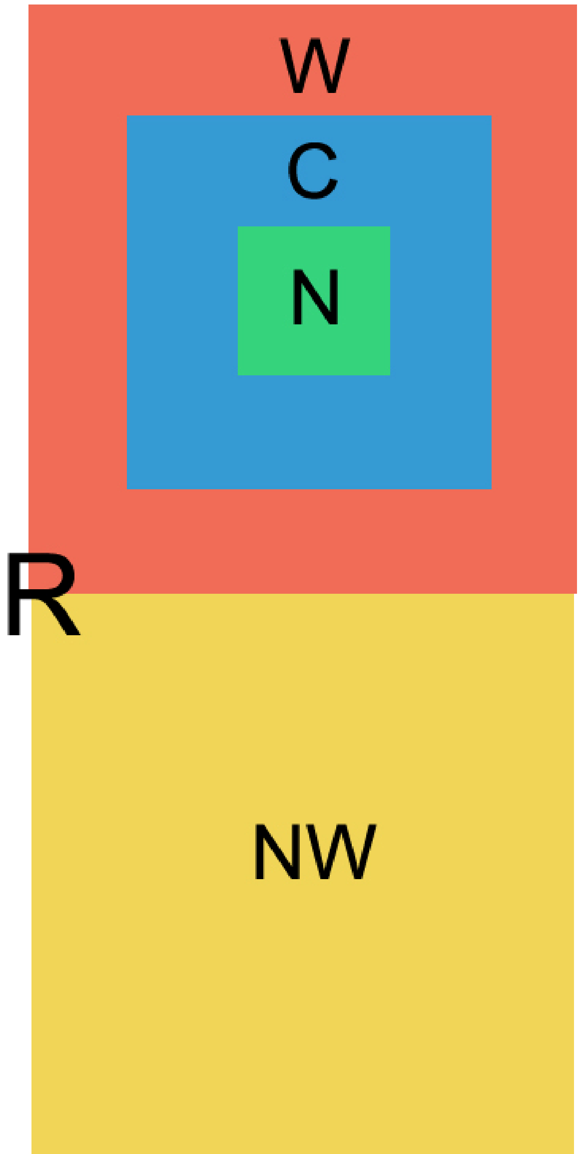
- **Liczby niewymierne** (NW) – to wszystkie liczby, których <u>nie możemy</u> zapisać za pomocą ułamka zwykłego $\frac{p}{q}$, gdzie p i q są liczbami całkowitymi i $q \neq 0$.
  Uwaga! Liczby niewymierne można także zapisać ułamkiem dziesiętnym nieskończonym nieokresowym.

Przykład
$\sqrt{3}$, $2\sqrt{13}$, $-4\sqrt{5}$, ale także Π (pi) oraz np.0,748…

- **Liczby rzeczywiste** (R) – to wszystkie liczby wymierne i niewymierne razem wzięte.

Przykład wszystkie liczby jakie znasz

Podział liczb na diagramie prezentuje się następująco



Liczby pierwsze i liczby złożone

- **Liczby pierwsze** – to liczby, które dzielą się tylko przez samą siebie i przez 1.

Przykład
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...

- **Liczby złożone** – to liczby, które dzielą się tylko przez samą siebie i przez 1 ale przez „coś jeszcze”(czyli jeszcze inną liczbę).
  Uwaga! Pamiętaj, że każdą liczbę złożoną zawsze da się zapisać jako mnożenie (iloczyn) przynajmniej 2 liczb pierwszych, np. 8 = 2 · 4, 12 = 2 · 2 · 3 itd

Przykład
4, 6, 8, 9,10, 12, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, ...

Uwaga!

Liczba 1 <u>nie jest</u> ani liczbą pierwszą, ani złożoną (na filmiku z roztargnienia zaliczyłem ją do liczb pierwszych).

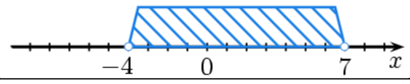
Liczby przeciwne i odwrotne do danej

Dana liczba (a)	**Liczba przeciwna (-a)** (różni się tylko znakiem)	**Liczba odwrotna ($\frac{1}{a}$)** (ma ten sam znak i otrzymujemy ją z podzielenia 1 przed daną liczbę
4	-4	$\frac{1}{4}$
$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{5}{2}$
$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	3

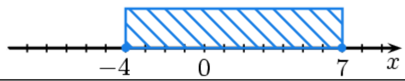
ZBIORY LICZBOWE

Rodzaje zbiorów

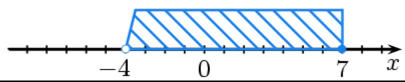
- **Obustronnie otwarty (a ; b)** – do tego zbioru należą wszystkie liczby znajdujące się pomiędzy liczbami **a** i **b**, ale same liczby **a** i **b** do tego zbioru nie należą.

Przykład Zbiór A = (-4 ; 7) – do zbioru A należą wszystkie liczby od -4 do 7 ale liczby -4 i 7 do zbioru A nie należą.	
Na osi liczbowej zbiór ten oznaczamy tak:	

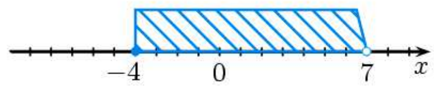
- **Obustronnie domknięty <a ; b>** – do tego zbioru należą wszystkie liczby znajdujące się pomiędzy liczbami **a** i **b**, ale również liczby **a** i **b** należą do tego zbioru.

Przykład Zbiór B = <-4 ; 7> – do zbioru B należą wszystkie liczby od -4 do 7 ale również liczby -4 i 7 należą do zbioru B.	
Na osi liczbowej zbiór ten oznaczamy tak:	

- **Prawostronnie domknięty (lewostronnie otwarty) (a ; b>** – do tego zbioru należą wszystkie liczby znajdujące się pomiędzy liczbami **a** i **b**, ale liczba **a** nie należy do tego zbioru, zaś **b** do niego należy.

Przykład Zbiór C= (-4 ; 7> – do zbioru C należą wszystkie liczby od -4 do 7, ale liczba -4 do zbioru C nie należy, zaś liczba 7 do zbioru C należy.	
Na osi liczbowej zbiór ten oznaczamy tak:	

- **Lewostronnie domknięty (prawostronnie otwarty) <a ; b)** – do tego zbioru należą wszystkie liczby znajdujące się pomiędzy liczbami **a** i **b**, ale liczba **b** nie należy do tego zbioru, zaś **a** do niego należy.

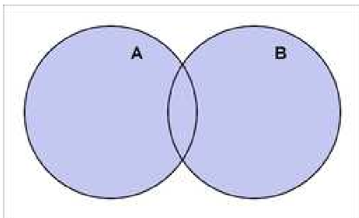
Przykład Zbiór D= <-4 ; 7) – do zbioru D należą wszystkie liczby od -4 do 7, ale liczba 7 do zbioru D nie należy, zaś liczba -4 do zbioru D należy.	
Na osi liczbowej zbiór ten oznaczamy tak:	

- **Zbiór pusty Ø** – zbiór, do którego nie należy żadna liczba.

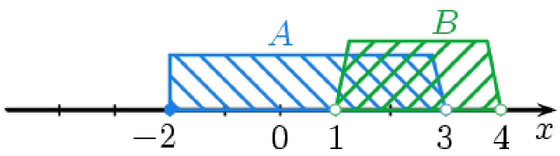
Działania na zbiorach

- **Dodawanie (suma) zbiorów: A+B lub A U B**

Sumę dwóch zbiorów A oraz B tworzą wszystkie liczby, które należą albo do jednego albo do drugiego zbioru.



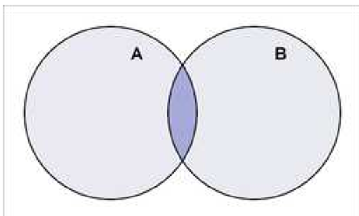
Przykład 1
A = <-2 ; 3) , B = (1 ; 4), zatem A U B = <-2 ; 4) – spójrz na rysunek poniżej



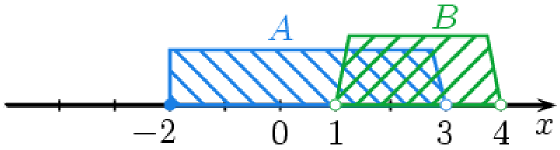
UWAGA!
Jeśli zbiory A i B są rozłączne (nie mają części wspólnej) to tworząc ich sumę po prostu je przepisujemy, np.
A = <-3 ; 1> , B = (2 ; 3) to A U B = <-3 ; 1> ∪ (2 ; 3)

- **Mnożenie (iloczyn) zbiorów: A·B lub A ∩ B**

Iloczyn dwóch zbiorów A oraz B tworzą wszystkie liczby, które należą jednocześnie do zbioru A oraz do zbioru B – czyli iloczyn to część wspólna zbiorów.



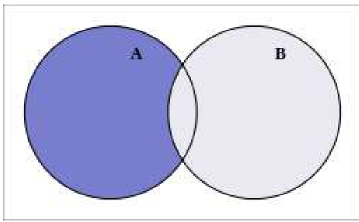
Przykład 2
A = <-2 ; 3) , B = (1 ; 4), zatem A ∩ B = (1 ; 3) – spójrz na rysunek poniżej



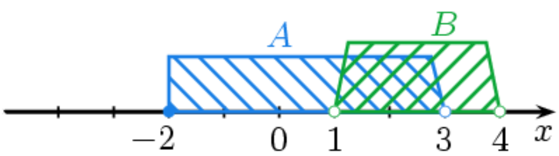
UWAGA!
Jeśli zbiory A i B są rozłączne (nie mają części wspólnej) to ich iloczynem jest zbiór pusty
A = <-3 ; 1> , B = (2 ; 3) to A ∩ B = Ø

- **Odejmowanie (różnica) zbiorów: A - B lub A \ B**

Różnicę zbioru A i zbioru B tworzą wszystkie liczby, które należą do zbioru A, ale nie należą do zbioru B – czyli jest to zbiór A z „odciętą” częścią wspólną zbiorów.



Przykład 3
A = <-2 ; 3) , B = (1 ; 4), zatem A \ B = <-2 ; 1> – spójrz na rysunek poniżej



UWAGA!
Jeśli zbiory A i B są rozłączne (nie mają części wspólnej) to ich różnicą jest cały zbiór A
A = <-3 ; 1> , B = (2 ; 3) to A \ B = A czyli <-3 ; 1>

Ułamki okresowe

Mamy 3 rodzaje ułamków dziesiętnych

1. **Ułamek dziesiętny skończony** – po przecinku znajduje się określona ilość cyfr, np. 0,6; 5,123 itd.
2. **Ułamek dziesiętny nieskończony okresowy** – po przecinku znajduje się nieskończona ilość cyfr, ale pewna ich grupa powtarza się cyklicznie, np. 0,121212… ; 5,672123123…
   Uwaga! Grupę cyfr, która powtarza się cyklicznie nazywamy okresem i zapisujemy 0,(12); 5,672(123). Ilość powtarzających się cyfr nazywamy długością okresu – i tak: 0,(12) ma okres długości 2, zaś 5,672(123) ma okres o długości 3.

Te dwa rodzaje ułamków dziesiętnych da się zamienić na ułamek zwykły, czyli są one liczbami wymiernymi.

3. **Ułamek dziesiętny nieskończony nieokresowy** - po przecinku znajduje się nieskończona liczba cyfr, ustawionych w nieuporządkowany sposób, np. 3,13808977289039…

Tego ułamka dziesiętnego nie da się zamienić na ułamek zwykły, czyli jest on liczbą niewymierną.

Przykład 4
Zamień 0,777… na ułamek zwykły.

Ułamek 0,777… oznaczamy literą **a** i tworzymy jego wielokrotność **10a** (jeśli długość okresu wynosi 1 – tworzymy 10a, jeśli długość okresu wynosi 2 – tworzymy 100a, itd.).
Zatem:
a = 0,777…
10a = 7,777…
robimy odejmowanie:
10a – a = 7,777… - 0,777…
i rozwiązujemy jak równanie:
9a = 7 |:9
a = $\frac{7}{9}$

Przykład 5
Zamień 3,(19) na ułamek zwykły.

Liczbę całości 3 zostawiamy na sam koniec a zajmujemy się jedynie ułamkiem okresowym 0,1919… Ułamek 0,1919… oznaczamy literą **a** i tworzymy jego wielokrotność **100a** (jeśli długość okresu wynosi 1 – tworzymy 10a, jeśli długość okresu wynosi 2 – tworzymy 100a, itd.).
Zatem:
a = 0,1919…
100a = 19,1919…
robimy odejmowanie:
100a – a = 19,1919… - 0,1919…
i rozwiązujemy jak równanie:
99a = 19 |:99
a = $\frac{19}{99}$ na końcu pamiętamy, aby dodać liczbę całości czyli 3 i otrzymujemy $3\frac{19}{99}$

Uwaga! Zauważ ciekawą zależność w tych przykładach – w liczniku ułamka otrzymaliśmy liczbę będącą okresem zaś w mianowniku liczbę o 1 mniejszą od odpowiednio 10 i 100.
Czy dzięki tej wskazówce potrafisz szybko powiedzieć jakim ułamkiem zwykłym jest 0,(321)? Racja - to $\frac{321}{999}$.

Błąd względny i błąd bezwzględny

Co musisz wiedzieć na wstępie?

- Wartość bezwzględna (moduł) z liczby a, którą oznaczamy |a| – to zawsze dodatnia wartość liczby np. |5| = 5 ale i |-5| = 5; |12| = 12 ale i |-12| = 12 itd.
- Zaokrąglanie liczb – polega na odrzuceniu końcowych cyfr w liczbie, zgodnie z zasadą, według której ostatnią z zachowanych cyfr w liczbie:
  - pozostawiamy bez zmian, gdy pierwszą z odrzuconych cyfr jest 0, 1, 2, 3, 4 (przybliżenie z niedomiarem)
  - zwiększamy o 1, gdy pierwszą z odrzuconych cyfr jest 5, 6, 7, 8, 9 (przybliżenie z nadmiarem)

Co to jest błąd bezwzględny?

Jest to wartość bezwzględna różnicy (odejmowania) danej liczby i jej przybliżenia.

Jeśli **x** – to dana liczba, zaś **a** – to przybliżenie liczby **x**, to błąd bezwzględny obliczamy **|x – a|**

Przykład 6
Jeśli liczba **x** wynosi 6,28, a jej przybliżenie **a** (do jednego miejsca po przecinku) wynosi 6,3, to błąd bezwzględny wyniesie |6,28 – 6,3| = |-0,02| = 0,02

Co to jest błąd względny?

Jest to stosunek (podzielenie) błędu bezwzględnego i wartości bezwzględnej danej liczby (błąd względny wyraża się zazwyczaj w %).

Jeśli **x** – to dana liczba, zaś **a** – to przybliżenie liczby **x**, to błąd względny obliczamy $\frac{|x - a|}{|x|}$

Przykład 7
Jeśli liczba **x** wynosi 6,28, a jej przybliżenie **a** (do jednego miejsca po przecinku) wynosi 6,3, to błąd względny wyniesie $\frac{|6,28 - 6,3|}{|6,28|} = \frac{|-0,02|}{|6,28|} = \frac{0,02}{6,28} \approx 0,00318$, a to daje $0,00318 \cdot 100\% = 0,318\%$

Procenty i obliczenia procentowe

Co to jest procent i promil ?

Procent pochodzi od łacińskiego „pro centum” czyli „na 100”, zatem jest to $\frac{1}{100}$ (czegoś)

Promil pochodzi od łacińskiego „pro mile” czyli „na 1000”, zatem jest to $\frac{1}{1000}$ (czegoś)

Przykład (zapamiętaj!)
$100\% = 1$, $50\% = \frac{1}{2}$, $75\% = \frac{3}{4}$, $25\% = \frac{1}{4}$, $20\% = \frac{1}{5}$, $10\% = \frac{1}{10}$

Jakie mamy rodzaje obliczeń procentowych ?

- **Obliczanie % z danej liczby**

Przykład 8
Oblicz 36% z liczby 400.

Układamy proporcję:
100% - 400
36% - x
Mnożąc „na krzyż” otrzymamy:
100x = 14400 |:100
x = 144

- **Obliczanie liczby, gdy dany jest jej %**

Przykład 9
Cenę roweru obniżono o 12% czyli o 84zł. Ile kosztował rower przed obniżką?

Układamy proporcję:
100% - x
12% - 84
Mnożąc „na krzyż” otrzymamy:
12x = 8400 |:12
x = 700

- **Obliczanie jakim procentem jednej liczby jest druga liczba**

Przykład 10
Jakim procentem liczby 240 jest liczba 36 ?

Układamy proporcję:
100% - 240
x - 36
Mnożąc „na krzyż” otrzymamy:
240x = 3600% |:24
x = 15%

- **O ile % więcej, o ile % mniej**

Przykład 11
1 kg jabłek kosztuje 4 zł a 1 kg gruszek kosztuje 5 zł.
  a) **O ile % jabłka są tańsze od gruszek ?**
  b) **O ile % gruszki są droższe od jabłek ?**

UWAGA!
W pytaniu „o ile % **mniej**" zawsze **większa** wartość to 100%
W pytaniu „o ile % **więcej**" zawsze **mniejsza** wartość to 100%
W obydwu przypadkach różnica w cenie to x (%)

Układamy zatem proporcje:

a) 100% - 5 x – 1 mnożąc „na krzyż" otrzymamy: 5x = 100% |:5 x = 20% Jabłka są tańsze od gruszek o 20%	b) 100% - 4 x – 1 mnożąc „na krzyż" otrzymamy: 4x = 100% |:4 x = 25% Gruszki są droższe od jabłek o 25%

- **Wielokrotna zmiana wartości (np.cen)**

Przykład 12
Cenę towaru obniżono o 10% , a następnie jeszcze o 20%. O ile % została obniżona cena towaru?

Cena po 1 obniżce 100% - 10% = 90% ceny początkowej
Cena po 2 obniżce 100% - 20% = 80% nowej ceny (czyli tej po 1 obniżce)

Więc po 2 obniżkach otrzymamy 80% z 90% ceny początkowej,
Czyli: $80\% \cdot 90\% = 0{,}80 \cdot 0{,}90 = 0{,}72 = 72\%$ - ceny początkowej.

Cenę towaru obniżono więc o 100% - 72% = 28% (nie o 30% jak wielu się początkowo wydaje)

- **Obliczanie podatku VAT**

Przykład 13
Tablet kosztuje 984 zł. Ile wynosi cena netto tego tabletu jeśli podatek VAT wynosi 23%?

ZAPAMIĘTAJ!
cena netto (100%) **+ podatek VAT** (np.23%) **= cena brutto** (tu 123%)

Układamy proporcję:
123% - 984
100% - x
Mnożąc „na krzyż" otrzymamy:
123x = 98400 |:123
x = 800
Cena netto tabletu wynosi 800zł.

- **Zadania dotyczące lokat i funduszy**

Przykład 14
Wpłaciłeś 8000 zł na 2-letnią lokatę o oprocentowaniu 4% i półrocznej kapitalizacji odsetek. Oblicz zysk z tej lokaty.

Korzystamy tu ze wzoru na procent składany (masz go w tablicach, z których będziesz korzystać na maturze – str. 3).

$K_n = K\cdot(1+\frac{p}{100})^n$

K_n – tyle będziesz mieć na lokacie na sam koniec oszczędzania (kapitał końcowy)
K – tyle wpłacasz na lokatę (kapitał początkowy)
p – oprocentowanie w okresie kapitalizacji (jeśli np. oprocentowanie roczne to 4%, a kapitalizacja jest co pół roku to 4% dzielimy na 2 i wychodzi 2% na każde pół roku oszczędzania)
n – liczba okresów kapitalizacji (jeśli wpłacamy na 2 lata a kapitalizacja jest co pół roku, to w okresie oszczędzania będziemy mieć 4 razy kapitalizację odsetek)

W naszym zadaniu mamy więc:

$K_n = 8000 \cdot (1+\frac{2}{100})^4 = 8000 \cdot (1{,}02)^4 = 8000 \cdot 1{,}08243 \approx 8659{,}46$ zł
Zysk wynosi: 8659,46 zł – 8000 zł = 659,46 zł